Examen du 6 janvier 2012

Durée : 3 heures.

SECTION A
Amphis 2A & 4C

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Exercice 1.
Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

$$z^7 = 64\sqrt{3} + 64i.$$

Exercice 2.

1. On suppose que b est un paramètre dans $\mathbb{C}$ et on considère la fonction polynomiale $S_b(X) = X^3 - b^3$ de la variable complexe X. Effectuer la division euclidienne de $S_b(X)$ par $X - b$.
2. On considère dans la suite le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 9$. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X - 1$.
3. Déduire de la question précédente que $P(X)$ peut s'écrire comme la différence entre deux cubes.
4. Déduire des questions précédentes une factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré un à coefficients complexes.

Exercice 3.

Soient les vecteurs $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, $u_3 = (2, 7, 6)$, $u_4 = (2, 5, 2)$ et $u_5 = (1, 2, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Rappeler la définition d'une base d'un espace vectoriel puis celle de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille de vecteurs (u_2, u_4, u_5) est-elle libre ?
3. Justifier soigneusement et *sans aucun calcul* le fait que (u_2, u_4, u_5) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 3)$ dans la base (u_2, u_4, u_5).

On considère la partie $F = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4a + 2b - 3c = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Rappeler la définition de *sous-espace vectoriel*, puis montrer que la partie F de $\mathbb{R}^3$ vérifie cette définition.
6. *Sans effectuer aucun calcul*, déterminer le sous-espace engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.

7. Déterminer *sans faire de calcul* si la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

8. Montrer que pour tout vecteur $v=(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation vectorielle :
$$x\,u_1+y\,u_2+z\,u_3+t\,u_4=v$$
possède (au moins) une solution (x,y,z,t) si et seulement si $4a-2b+c=0$.
9. Peut-on conclure à l'aide de la question précédente que l'on a :
$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x-2y+z=0\right\} \text{ ?}$$
Justifier soigneusement la réponse.
10. Extraire de la famille de vecteurs (u_1,u_2,u_3,u_4) une base de G et préciser $\dim G$.
11. Justifier le fait que le sous-ensemble $F\cap G$ de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de ce sous-espace $F\cap G$ puis calculer $\dim(F\cap G)$.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition précise (en termes de ε) de la continuité d'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en $a\in\mathbb{R}$.
2. Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, où $l\in\mathbb{R}$.

On considère la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $F(x)=e^x+e^{-x}$.

3. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Etudier les variations de F puis esquisser le graphe de F sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{2^x}$.

On note f la restriction de F à $[0,+\infty[$.

5. Montrer que l'application f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1}:[2,+\infty[\to[0,+\infty[$ est continue.
6. Montrer que l'application f^{-1} est dérivable sur $]2,+\infty[$. Est-elle dérivable en 2 ?
7. Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)=\sqrt{(f(x)-2)(f(x)+2)}$.
8. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y>2$
$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{\sqrt{(y-2)(y+2)}}.$$

Exercice 5.

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{3}\,(1+\cos(x))$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\left[\begin{array}{l} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,. \end{array}\right.$$
On note $I=[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que l'équation $x=f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I.
On note α ce nombre.
3. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{3}\,|u_n-\alpha|$.
4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{3^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.